MANEJO DE ESPACIOS Y CANTIDADES

Factorización

En la Factorización se procede en forma contraria al desarrollo de Productos Notables es decir, nos dan un polinomio que debemos expresar como multiplicación (factores). Presentándosenos los siguientes casos:

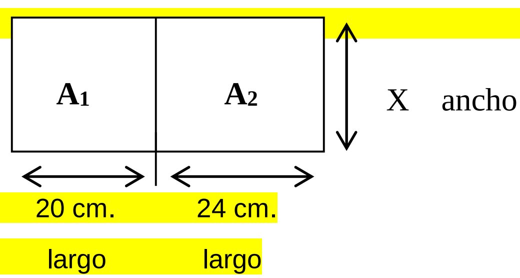
1) **Por factor común**
2) **Factor común por agrupación de términos**
3) **Por trinomio cuadrado perfecto**
4) **Por trinomio cuadrado por suma y resta**
5) **Por diferencia de cuadrados**
6) **Por trinomios cuadráticos de la forma: $x^2 + bx + c$; ó $ax^2 + bx + c$**
7) **Suma y/o diferencia de cubos**

En el medio que nos rodea observamos que existen casos comunes por ejemplo todos comemos, tenemos un lugar donde vivir, en la escuela el uniforme, los pupitres, el horario, etc. y en álgebra existe algo similar, ya que por ejemplo, en los polinomios observamos que en ocasiones en los términos se repiten letras o números y se estructuran de tal manera que se pueden expresar mediante factores.

Supongamos que eres el dueño de un terreno rectangular de área igual a 352 m^2, quieres fraccionarlo en dos partes que tengan el mismo ancho y que la longitud de uno sea de 20 y el otro de24 metros. ¿Cuál es el área de cada terreno?

Datos figuras área del rectángulo = (b)(h)

a) $L_1 = 20m$
b) $L_2 = 24m$
c) $A_1 = ?$
d) $A_2 = ?$
e) X = ancho
f) $A_T = 352\ m^2$



Desarrollo:

CONALEP

MANEJO DE ESPACIOS Y CANTIDADES

Al observar el diagrama el terreno tiene una figura rectangular por lo que para encontrar el área total tenemos:

Ancho = x

Largo = 20 m + 24 m

A_T = 352 m^2

Usando la fórmula de área para un rectángulo A = (largo x ancho) y sustituyendo tenemos:

A_T = x (20m + 24m)

A_T = x (44)

352 m^2 = 44 x

Despejando X : X = $\frac{352m^2}{44m}$

encontramos el ancho de cada terreno:

X = $\frac{352m^2}{44m}$ = 8 m

COMPROBACIÓN:

Entonces tenemos para: A_1 = (8 m) (20 m) = 160 m^2

y A_2 = (8 m) (24 m) = 192 m^2

que al agrupar resulta :

A_T= A_1+A_2 = (8)(20) + (8)(24) = 8 (20+24) = 160 +192 = 352 m_2

Si observas el resultado, el ancho aparece en las dos áreas, este valor en la factorización, recibe el nombre de **factor común.**

A continuación, analizaremos cada una de las diferentes formas de Factorización siguiendo el orden del listado anterior.

MANEJO DE ESPACIOS Y CANTIDADES

1. Por factor común

Para poder factorizar polinomios utilizando el factor común, se recomiendan los siguientes pasos que a continuación se te presenta.

Ejemplo: Factoriza la expresión $4a^4b^2 – 6a^3b^3 + 8a^3b^4$

a) Se busca el común divisor de los coeficientes

4	**6**	**8**	**2**
2	3	4	

Como puedes ver, el **2** es el común divisor de 4,6 y 8 porque es el mínimo valor que divide a todos los números involucrados (4,6 y 8).

b) Cada uno de los términos serán divididos entre las literales repetidas que contengan el menor exponente.

$4a^4b^2 – 6\ a^3b^3 + 8\ a^2b^4$

En este caso observa que $\mathbf{a^2}$ **y** $\mathbf{b^2}$ son las literales que se repiten y tienen el menor exponente.

Ahora bien, el **factor común** es entonces: $\mathbf{2a^2b^2}$ formado por el común divisor (**2**) y las literales que se simplificaron ($\mathbf{a^2b^2}$).

c) Dividir cada término del polinomio inicial entre el factor común encontrado:

$$\frac{4a^4b^2}{2a^2b^2} - \frac{6a^3b^3}{2a^2b^2} + \frac{8a^2b^4}{2a^2b^2} = 2a^2 – 3ab + 4b^2$$

d) La expresión factorizada quedaría como:

$(2a^2b^2)\ (2a^2 – 3ab + 4b^2)$ siendo este el resultado.

Verdad que no es tan complicado cómo parece?

CONALEP

MANEJO DE ESPACIOS Y CANTIDADES

A continuación se presentan una serie de ejercicios que podrás resolver utilizando el mismo razonamiento; compara tu resultado con los que se te dan.

2. Factor común por agrupación de términos.

A diferencia del caso anterior, existen polinomios que tienen un número par de términos en los que al agruparse por parejas, observamos elementos comunes que se factorizan por el siguiente procedimiento:

Ejemplo: factorizar $10ax^2 + 9b^2y - 15b^2x^2 - 6ay$

1) Se agrupan por parejas buscando que los términos tengan al menos una literal semejante y los coeficientes tengan un número común.

$\underline{10ax^2 - 6ay} - 15b^2x^2 + 9b^2y$ o también podría agruparse: $\underline{10ax^2 - 15b^2x^2} + 9b^2y - 6ay$

2) Partiendo del ejemplo anterior, se obtiene el factor común de cada pareja de términos.

$2a(5x^2 - 3y) - 3b^2(5x^2 - 3y)$ ó $5x^2(2a - 3b^2) + 3y(3b^2 - 2a)$

3) Puedes ver que para el primer caso $(5x^2 - 3y)$ es un factor común en ambos términos y para el segundo es $(3b^2 - 2a)$ por lo que razonando de manera similar a la factorización por factor común, lo podemos expresar como:

$(5x^2 - 3y)(2a - 3b^2)$

el cual es el mismo resultado por cualquiera de las dos opciones.

4) El resultado del paso tres es la Factorización del polinomio.

$$10ax^2 + 9b^2y - 15b^2x^2 - 6ay = (5x^2 - 3y)(2a - 3b^2)$$

CONALEP

3. Trinomio cuadrado perfecto.

Se reconoce este tipo de factorización porque de los tres términos dos de ellos, ordenados en forma decreciente (el primero y último) tienen raíz cuadrada exacta y el término medio es de primer grado y corresponde al doble producto del primero por el segundo.

El procedimiento para factorizar este tipo de trinomios es:

Ejemplo: Factoriza el siguiente trinomio cuadrado perfecto: $12x + 9 + 4x^2$

1) Ordena el polinomio en forma descendente:

$$4x^2 + 12x + 9$$

2) Se extrae raíz cuadrada al primero y al tercer término.

siendo las raíces exactas; $\sqrt{4x^2} = \mathbf{2x}$, $\sqrt{9} = \mathbf{3}$

3) El doble producto de los resultados del paso dos debe ser igual al segundo término del trinomio del primer paso.

$$2(2x)(3) = \mathbf{12x}$$

4) Se escribe dentro de un paréntesis los resultados de las raíces, separados por el signo del segundo término y se eleva todo al cuadrado. Si sigues esta secuencia, podrás factorizar cualquier trinomio cuadrado perfecto (TCP).

12x + 9 + 4x2 = 4x2 + 12x +9 = $\mathbf{(2x+3)^2}$

Hemos llegado al resultado!

CONALEP

MANEJO DE ESPACIOS Y CANTIDADES

4. Trinomio cuadrado por suma y resta (suma o diferencia)

Cuando se presente el caso en el cual no se ajusta el polinomio a un trinomio cuadrado perfecto -tres términos, dos de ellos (el primero y último) tienen raíz cuadrada exacta y el término medio es de primer grado y corresponde al doble producto del primero por el segundo -se tendrá que ajustar dicho trinomio a uno perfecto, agregando o restando el valor faltante o requerido.

Es así como se presentan dos casos particulares:

I. Cuando el trinomio es de la forma.

$a^2 \pm 2ab + c^2 = (a \pm b)^2 \pm c$

Ejemplo: factoriza la expresión **x^2 + 6 x + 13**

La solución se puede dar mediante el siguiente procedimiento:

1. Se obtiene la raíz del primer término (cuadrático).

$$\sqrt{x^2} = x$$

2. 6x debe corresponder al doble producto del primer término por el segundo término, por lo que para encontrar el cuadrado del segundo término, se divide el término lineal entre 2

$$\frac{6}{2} = 3$$

3. Para no alterar la igualdad se suma y resta el cuadrado del resultado obtenido en el punto anterior para poder tener así, un trinomio cuadrado perfecto (TCP)

Como 3^2 = **9** entonces la expresión quedaría:

$X^2 + 6x + 9 – 9 + 13$

Reduciendo: $x^2 + 6x + 9$ (-9+13)

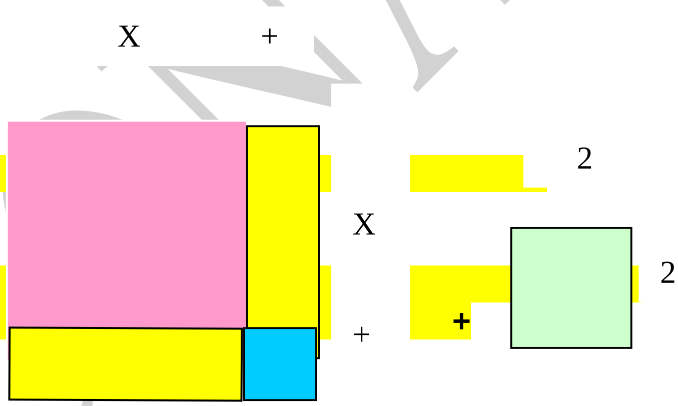
$x^2 + 6x + 9 + 4$

4. Ahora sí, la expresión x2 + 6x + 9 es un TPC porque $\sqrt{x^2} = x$ y $\sqrt{9} = 3$ y además se cumple que 2 (x) (3) = 6x que corresponde al segundo término por lo que se puede expresar como binomio al cuadrado quedando la última expresión:

$(x + 3)^2 + 4$

por lo que el resultado sería: $x^2 + 6x + 13 =$ $\mathbf{(x + 3)^2 + 4}$

Gráficamente lo podemos representar:



A este tipo de factorización lo podemos generalizar como:

$a^2 \pm 2ab + c^2 = (a \pm b)^2 \pm c$

II) El trinomio de la forma $x^2 + 25 + 14x$

Se resuelve procediendo de manera muy similar al anterior.

MANEJO DE ESPACIOS Y CANTIDADES

1) Se ordena el trinomio de manera descendente de potencia**.**

Ejemplo: $x^2 + 25 + 14x = 0$

Ordenando: $x^2 + 14x + 25 = 0$

2) Se obtienen las raíces del primero y tercer término **(siendo valores cuadráticos).** $\sqrt{a^2} = a, \sqrt{b^2} = b$ ésta es la diferencia con el caso anterior.

$x^2 + 14x + 25 = 0$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$x \qquad\qquad 5$

3.Se realiza la operación del duplo del primero por el segundo término**,** **(2 a b)** vemos que:

$a = x$, $b = 5$ por lo que $2ab = 2(x)(5) = 10x$

4. Se compara el resultado obtenido con el término lineal que nos dieron y se expresa la diferencia entre estas dos.

$14x - 10x = 4x$

5. Ahora ya tienes un TCP que es:

$x^2 + 14x + 25 = 0$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$x \qquad\qquad 5$

$2(x)(5) = 10x$

De tal forma que el binomio al cuadrado quedaría: $x^2 + 14x + 25 = (x + 5)^2$

De esta forma, llegamos al resultado, anotando el binomio cuadrado $\mathbf{(x + 5)^2}$ y lo obtenido en el paso cuatro (**4x**) quedando:

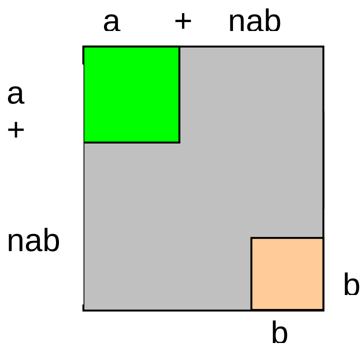
$X^2 + 14x + 25 = x^2 + 14x + 25 = \mathbf{(x + 5)^2 + 4x}$

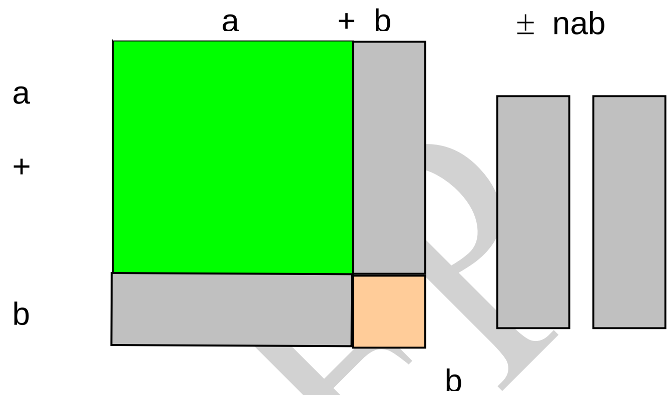
Gráficamente y en forma general lo podemos representar como:

MANEJO DE ESPACIOS Y CANTIDADES

$a^2 \pm nab + b^2 = \left(a^2 \pm 2ab + b^2\right) \pm nab$

$(a \pm b)^2 \pm nab$ donde n = 2 a b ± nab





5. Trinomios cuadráticos de la forma $x^2 + bx + c$.

Cuando el trinomio es de la forma $x^2 + bx + c$; el primer término presenta raíz cuadrada exacta. Después de ordenar el polinomio se procede de la siguiente manera:

Ejemplo: Factorizar la siguiente expresión $x^2 - 2x - 15$

1) Se extrae la raíz cuadrada al primer término.

$$\sqrt{x^2} = x$$

2) Se ponen dos paréntesis cuyo primer término en ambos será el resultado obtenido del paso anterior (descomposición en factores).

(X)(X)

3) Se descompone el tercer término en dos factores, que cumplan la condición de que: su producto sea el tercer término y al mismo tiempo la suma algebraica de ellos sea el segundo término.

15 = 15 x 1 , 15 = 3 x 5 , -1 + 15 = 14; -15 + 1 = - 14; - 3 + 5 = 2;

- 5 + 3 = - 2, como se puede ver el producto ***(3 x 5),*** corresponde al término independiente (10) y a la vez ***(3 – 5***) corresponde a la suma algebraica del coeficiente del segundo término (-2).

4) Los factores obtenidos del paso tres serán los segundos términos dentro de los paréntesis, respetando los signos determinados en el paso tres, quedando:

$$(x +3) (x – 5)$$

5) El resultado obtenido es la Factorización del polinomio.

$$x^2 - 2x - 15 = \mathbf{(x +3) (x – 5)}$$

Para comprobar el resultado obtenido se desarrolla el producto de dichos binomios:

$$(x + 3) (x - 5) = x^2 \;(\boldsymbol{- 5x + 3x}) - 15 = \mathbf{x^2 - 2x - 15}$$

Se observa que se tienen diferentes combinaciones de factores pero no todos cumplen con la segunda condición.

(x - 5)(x + 3)

6. Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Cuando el trinomio es de la forma $ax^2 + bx + c$ se pueden presentar dos casos:

Primer caso:

Cuando sólo un coeficiente del término cuadrático (raíz cuadrada exacta). Para factorizar se procede de la siguiente manera.

MANEJO DE ESPACIOS Y CANTIDADES

Ejemplo: factoriza la siguiente expresión $4x^2 + 16x + 15 = 0$

1) Se extrae la raíz cuadrada al primer término, no olvides que en algunos casos hay que ordenar en forma descendente

$$\sqrt{4x^2} = 2x$$

2) Se abren dos paréntesis cuyos primeros términos serán el resultado del paso uno.

$$(2x \quad)(2x \quad) = 0$$

3) Se divide el término lineal del polinomio a factorizar entre el resultado del paso uno.

2° término lineal = 16 x

resultado del paso uno = 2x

quedando entonces: $\frac{16x}{2x} = 8$

4) Se descompone el término numérico en dos factores cuya suma sea el resultado del paso tres.

$$15 = (5)(3) \text{ y además } 5 + 3 = 8$$

observa que este resultado corresponde al valor obtenido en el paso tres.

5) Los factores del paso cuatro forman los segundos términos de los paréntesis del paso dos. Obteniendo el resultado siguiente.

$$(2x+5)\ (2x+3)$$

De donde $4x^2 + 16x + 15 =$ **(2x+5) (2x+3)**

Para comprobar el resultado, se efectúa el producto de binomios obtenidos:

$$(2x + 5)\ (2x + 3) = 4x^2 + (6x + 10x) + 15 = 4x^2 + 16x + 15$$

Segundo caso:

Cuando el coeficiente del término cuadráticos no tiene raíz cuadrada exacta, se procede de la siguiente manera:

Ejemplo factoriza $3x^2 + 7x + 2$

1) Se buscan dos factores que multiplicados nos den el primer término del trinomio y dos factores que multiplicados nos den el tercer término.

1er. Término: $3x^2 = (3x)(x)$ y el tercer término $2 = (2)(1)$

2) De igual forma que el caso anterior, se identifican los números que al multiplicar los extremos y los medios, los productos resultantes nos den la suma algebraica del segundo término. Por lo que el resultado es:

3x, 2 = extremo

x,1 = medio

$3x^2 + 7x + 2 = (3x + 1)(x + 2)$

Para comprobar el resultado se desarrolla el producto:

$(3x + 1)(x + 2) = 3x^2 + (6x + x) + 2 = 3x^2 + 7x + 2$

6. Diferencia de Cuadrados.

Cuando se factoriza una diferencia de cuadrados como $x^2 – 9$, se llevan a cabo los siguientes pasos:

1. Se obtienen la raíz cuadrada de cada término (minuendo y sustraendo):

$$\sqrt{x^2} = x \quad \text{y} \quad \sqrt{9} = 3$$

CONALEP

2. Se abren dos paréntesis en donde el primer término en ambos paréntesis son el resultado de la primera raíz .

(x   ) (x   ) = 0

3. el segundo término en ambos paréntesis, es el resultado de la segunda raíz, separados por signos más (+) y menos (-) respectivamente.

(x - 3) (x + 3) = 0

El resultado obtenido es:

$x^2 - 9 =$ **(x + 3) (x – 3)**

Para comprobar desarrolla el producto

(x - 3) (x + 3) = x^2 (**– 3 *x* + 3 *x***) - 9 = $x^2 - 9$

7.Suma o diferencia de cubos

Este tipo de factorización se reconoce porque consta de dos términos los cuales tienen raíz cúbica exacta. El procedimiento a seguir es:

Ejemplo: factorizar 27 $a^3 - b^3$

1) Se extrae la raíz cúbica a cada término.

$$\sqrt[3]{27a^3} = 3a \qquad \sqrt[3]{-b^3} = -b$$

2) Se escriben entre paréntesis el resultado del paso uno, separados por el signo del binomio original.

(3a - b)

3) El segundo factor se forma:

a) Elevando al cuadrado el primer término. $(3a)^2 = 9a^2$

b) Efectuar el producto del primero por el segundo cambiando el signo que separa a los elementos del paréntesis. $-(3a)(-b) = +3ab$

c) Y por último elevar al cuadrado el segundo término. $(b)^2 = b^2$

Esto te da un TCP.

4) El resultado de la factorización se hace uniendo el trinomio y el factor obtenido en el paso dos.

$$27a^3 - b^3 = (3a - b)(9a^2 + 3ab + b^2)$$

Para comprobar la factorización se realiza el producto correspondiente.

$(3a - b)(9a^2 + 3ab + b^2) = 27a^3 + (9a^2b + 3ab^2 - 9a^2b - 3ab^2) - b^3$

reduciendo términos semejantes la expresión resultante es:

$27a^3 - b^3 = \mathbf{(3a - b)(9a^2 + 3ab + b^2)}$

CONALEP